



Convection de Rayleigh–Bénard dans les liquides magnétiques en cellule de Hele–Shaw annulaire

M. Souhar^{a,*}, S. Aniss^b, J. P. Brancher^a

^a Laboratoire d’Énergétique et de Mécanique théorique et Appliquée, CNRS-URA 875, 2, Avenue de la Forêt de Haye, B.P. 160 54504, Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France

^b Laboratoire de Mécanique, Faculté des Sciences Ain Chok, Km 8, Route d’El Jadida, BP 5366, Maârif, Casablanca, Maroc

Reçu 27 juin 1994; sous forme finale 6 avril 1998

Résumé

Dans cette étude nous présentons des résultats d’une simulation théorique et expérimentale, en microgravité, de la convection de Rayleigh–Bénard dans un liquide magnétique (ferrofluide). Le ferrofluide, confiné dans une cellule de Hele–Shaw annulaire et horizontale, est soumis simultanément à un gradient de champ magnétique extérieur et à un gradient de température. Cette configuration permet d’éliminer l’effet de pesanteur ($\mathbf{g} \cong \mathbf{0}$) et d’avoir une convection purement magnétique. © 1998 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

Rayleigh–Bénard convection in a magnetic fluid in an annular Hele–Shaw cell

Abstract:—This paper deals with a theoretical and experimental investigation of Rayleigh–Bénard convection in a magnetic fluid submitted simultaneously to a gradient of magnetic field and a gradient of temperature. With an annular Hele–Shaw cell configuration, we show the possibility to simulate Rayleigh–Bénard experiments and its control by a gradient of magnetic field in the absence of gravity ($\mathbf{g} \cong \mathbf{0}$). © 1998 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

Nomenclature

a diffusivité thermique
 \mathbf{g} accélération de la pesanteur
 \mathbf{h} champ magnétique propre
 \mathbf{H} (H_a) champ magnétique total au sein du ferrofluide (champ extérieur)
 H_e module du champ magnétique au sein du liquide magnétique à l’équilibre
 $K = -(\partial M/\partial T)|_{H=cte}$ coefficient pyromagnétique
 m nombre d’onde azimutal (entier)
 \mathbf{M} (M_c) aimantation au sein du ferrofluide (module de l’aimantation à l’équilibre)
 \mathbf{M}' perturbation de l’aimantation par rapport à celle de l’équilibre
 $p_c(p')$ pression à l’équilibre (perturbation de la pression par rapport à celle de l’équilibre)
 $P, (P_0)$ pression en convection (pression caractéristique)

R_1 (R_2) rayon intérieur (extérieur) de la cavité annulaire qu’occupe ferrofluide
 $Ra^* = \beta g(T_1 - T_2)\varepsilon^4/\Delta R\nu a$ nombre de Rayleigh gravitationnel de la cellule
 $Ram^* = (\mu_0 K |\nabla H| (T_1 - T_2)\varepsilon^2 \Delta R/\mu(1 + \chi)a)$ nombre de Rayleigh magnétique de la cellule
 Ram_c^* nombre de Rayleigh magnétique critique
 $(r, \theta, z); (r^*, \theta, z^*)$ coordonnées cylindriques dimensionnelles (adimensionnelles)
 $T_1, (T_2)$ température de la plaque chaude (froide)
 T_e température du ferrofluide à l’équilibre
 $T', (T^*)$ perturbation de la température par rapport à celle de l’équilibre (température adimensionnelle)
 $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$ repère de coordonnées cylindriques
 $V_0, (V_1)$: vitesse caractéristique de u et v (de w)
 $\mathbf{V}(u, v, w); \mathbf{V}(u^*, v^*, w^*)$ champ de vitesse dimensionnel (adimensionnel).

Symboles grecques

$\beta = -(1/\rho_0)(\partial\rho/\partial T)_p$ coefficient de dilatation à pression constante

* Corresponding author.

$\delta = \Delta R/R_1$ paramètre de courbure de la cavité annulaire
 $\Delta R = R_2 - R_1$ Largeur de l'espace annulaire de la cavité
 ΔT écart de température caractéristique
 ε épaisseur de la cavité occupée par le ferrofluide
 $\varepsilon^* = \varepsilon/\Delta R$ rapport d'aspect de la cellule ($\ll 1$)
 λ conductivité thermique du ferrofluide
 $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ SI perméabilité magnétique du vide
 μ (ν) viscosité dynamique (cinématique) du ferrofluide
 ρ_c masse volumique à l'équilibre
 ρ' perturbation de la masse volumique par rapport à celle de l'équilibre
 $\chi = -(\partial M/\partial H)|_{T=\text{cte}}$ susceptibilité magnétique.

1. Introduction

L'étude qui suit concerne le contrôle de la convection thermique dans les liquides magnétiques par un champ magnétique adéquat. Le liquide magnétique appelé aussi ferrofluide est une suspension colloïdale stable de particules ferromagnétiques dans un liquide porteur. Ces particules sont de taille suffisamment fine—de l'ordre de 100 Å. La suspension est supposée homogène, isotrope et non conductrice d'électricité.

Les forces volumiques au sein du liquide magnétique en présence d'un champ, dans un modèle symétrique [1], sont $\mu_0 M \nabla H$ ($\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ est la perméabilité magnétique du vide). Ces forces sont analogues aux forces gravitationnelles ρg . Le gradient de champ ∇H , l'aimantation M au sein du liquide magnétique et le coefficient pyromagnétique $K = -(\partial M/\partial T)$ jouent les rôles respectifs de la pesanteur g , de la masse volumique ρ et du coefficient de dilatation thermique $\beta = -(1/\rho)(\partial \rho/\partial T)$.

La convection thermomagnétique est une nouvelle technique à la disposition du transfert thermique contrôlé. Elle a été analysée dans plusieurs monographies récents [2, 3]. L'un des problèmes les plus étudiés dans ce domaine est celui de l'instabilité thermoconvective de Rayleigh–Bénard où l'on peut combiner la convection gravitationnelle et magnétique. Le nombre de Rayleigh est alors un nombre généralisé. Plusieurs configurations sont possibles dont un cas est celui d'une couche horizontale soumise à un champ magnétique uniforme et à un gradient de température; ce dernier induit un gradient de champ à travers cette couche. Par conséquent, les forces magnétiques qui apparaissent peuvent s'ajouter aux forces gravitationnelles et joueraient un rôle dans l'instabilité thermoconvective qui se manifeste par l'apparition des cellules de Rayleigh–Bénard lorsqu'on atteint une certaine valeur critique du nombre de Rayleigh. Ce cas a été examiné théoriquement par Finlayson lorsque le ferrofluide est confiné entre deux parois horizontales libres ou rigides et non magnétiques [4].

Cette même configuration a été suivie une quinzaine d'années plus tard par une étude expérimentale consistant

à appliquer un champ magnétique intense à travers une couche cylindrique d'un liquide magnétique d'épaisseur d , afin que celui-ci soit saturé [5]. Le but était de détecter le nombre de Rayleigh expérimental correspondant au seuil de l'instabilité, par une mesure du nombre de Nusselt en fonction du nombre Rayleigh. Mais les conditions expérimentales dans cette étude [5] ne permettaient pas de confirmer si le ferrofluide était effectivement en saturation. Alors Stiles et Kagan [6] ont repris le même travail expérimental, généralisant les considérations théoriques de Finlayson [4] sur le nombre de Rayleigh, en considérant que sous un champ magnétique intense la viscosité du liquide magnétique est la somme d'une viscosité rotationnelle et d'une viscosité de cisaillement. Dans ces conditions, les résultats expérimentaux sont en parfait accord avec les prévisions théoriques.

La même configuration que celle de Finlayson a été reprise récemment par Rudraiah et Sekhar [7], mais, cette fois ci, le gradient de température appliqué à la couche de fluide magnétique horizontales est non uniforme. Ceci s'obtient soit par un chauffage ou un refroidissement transitoire sur les bords, soit par l'existence de sources de chaleur uniformes dans le milieu. La variation de température des sources de chaleur introduit une variation du champ magnétique, c'est une autre façon de contrôler la convection dans les liquides magnétiques. L'effet des sources de chaleur est analogue à celui de l'effet magnétocalorifique traité par Berkovsky et Bashtovoi [8].

Notre but principal dans cette étude est de faire une simulation expérimentale, au sol, de la convection de Rayleigh–Bénard en apesanteur dans un liquide magnétique soumis à un gradient de champ extérieur, ce dernier joue le rôle de la pesanteur. Afin de réaliser cela, nous avons travaillé avec une cellule de Hele–Shaw annulaire et horizontale. C'est l'une des rares configurations où l'on peut éliminer l'effet de pesanteur ($g \cong 0$).

Le seuil de convection expérimental est déterminé en contrôlant le champ de température lors du passage du régime conductif au régime convectif. Nous utilisons, pour cela, des thermocouples et des cristaux liquides. Cette étude est accompagnée au préalable d'une formulation linéaire du problème: nous effectuons un développement asymptotique, au premier ordre, des équations régissant le mouvement de convection par rapport au rapport d'aspect de la cellule, $\varepsilon^* = \varepsilon/\Delta R$, qui est un paramètre petit devant l'unité. Nous effectuons ensuite une étude de stabilité linéaire qui consiste à déterminer le seuil de convection théorique qu'on compare à celui expérimental.

2. Formulation linéaire du problème

2.1. Calcul approximatif du champ propre

Nous considérons une couronne de liquide magnétique horizontale: $R_1 < r < R_2$, $0 < z < \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll \Delta R$ où

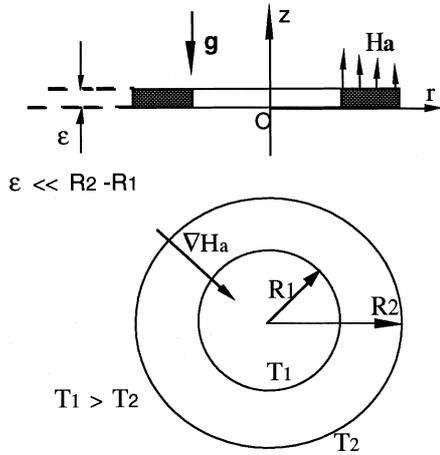


Fig. 1. Couronne de liquide magnétique placée dans un gradient de champ magnétique constant et dans un gradient de température ($T_1 > T_2$).

$\Delta R = R_2 - R_1$ (voir Fig. 1). r , θ et z sont les coordonnées cylindriques dans le repère $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$. Les deux faces interne ($r = R_1$) et externe ($r = R_2$) sont conductrices et maintenues respectivement aux températures T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$). Les deux faces horizontales ($z = 0$ et $z = \varepsilon$) sont rigides et supposées parfaitement isolantes. La cavité est placée dans un champ magnétique extérieur:

$$\mathbf{H}_a [H_r = -Az, H_\theta = 0, H_z = -Ar + B] \quad (1)$$

vérifiant en dehors de tout milieu aimantable: $\text{Rot } \mathbf{H}_a = \mathbf{0}$ et $\text{Div } \mathbf{H}_a = 0$.

La composante radiale est négligée puisque $A\varepsilon \ll AR_1$. La couche annulaire de liquide magnétique est alors soumise à un gradient de champ radial constant et parallèle au gradient de température (Fig. 1). Ce gradient de champ crée à travers la couche du liquide un champ induit: $\mathbf{h} = -(\chi\mathbf{H}_a/1 + \chi)$, [9]. Par ailleurs on se place dans le cas linéaire où $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$. Dans ces conditions nous montrons que $\mathbf{h} = -\mathbf{M}$. Le champ total dans le liquide magnétique est donc:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{h} = \mathbf{H}_a - \mathbf{M} \quad (2)$$

2.2. Equations linearisées des bilans

2.2.1. Equilibre

Si nous notons par T_e , p_e , ρ_e , H_e et M_e la température, la pression, la masse volumique, le champ magnétique total et l'aimantation à l'équilibre, nous avons:

$$-\nabla p_e - \rho_e \mathbf{g} + \mu_0 M_e \nabla H_e = 0, \quad (3)$$

$$T_e = -\frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln r - \frac{T_2 \ln R_1 - T_1 \ln R_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

où

$$H_e = H_a - M_e$$

$$M_e = M(H^*, T^*) - K(T_e - T^*) + \chi(H_e - H^*)$$

$$\rho_e = \rho(T^*)[1 - \beta(T_e - T^*)] \quad (4)$$

T^* et H^* sont des valeurs de référence. On note que la distribution de la température à l'équilibre n'est pas linéaire et que son gradient n'est pas constant, ce qui ajoute une difficulté supplémentaire par rapport au problème de Rayleigh-Bénard classique.

2.2.2. Equation de mouvement

L'étude de stabilité consiste à superposer à celui-ci des perturbations en posant:

$$T = T_e + T', \quad p = p_e + p', \quad \mathbf{V} = \mathbf{0} + \mathbf{V},$$

$$\rho = \rho_e + \rho', \quad M = M_e + M', \quad H = H_e + H'$$

où

$$H = H_a - M$$

$$M = M(H^*, T^*) - K(T - T^*) + \chi(H - H^*)$$

$$\rho = \rho(T^*)[1 - \beta(T - T^*)]. \quad (5)$$

Nous montrons alors que: $M' = M - M_e = -[KT/(1 + \chi)]$, $H' = [KT'/(1 + \chi)]$, $\rho' = -\rho(T^*)\beta T'$.

L'équation linéarisée du mouvement de convection stationnaire pour un liquide magnétique, dans un modèle symétrique, dérive de l'équation de Navier-Stokes modifiée du terme $\mu_0 M \nabla H$ [1]. En tenant compte des équations de l'équilibre (3), elle s'écrit:

$$-\nabla p' + \mu \nabla \mathbf{V} + \rho' \mathbf{g} + \mu_0 M \nabla H - \mu_0 M_e \nabla H_e = \mathbf{0} \quad (6)$$

où

$$\mu_0 M \nabla H - \mu_0 M_e \nabla H_e = \mu_0 M' \nabla (H_e + M_e)$$

$$- \frac{\mu_0}{2} \nabla (2M_e M' + M'^2)$$

en remarquant que $H_e + M_e = H_a$, (6) s'écrit:

$$-\nabla P + \mu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{G} T' = \mathbf{0} \quad (7)$$

où

$$P = p' + \frac{\mu_0}{2} (2M_e M' + M'^2) \quad \text{et}$$

$$\mathbf{G} = \frac{\mu_0 K |\nabla H_a|}{1 + \chi} \mathbf{u}_r + g \rho(T^*) \beta \mathbf{k}$$

\mathbf{G} représente une sorte de gravité apparente qui peut être contrôlée par simple réglage du gradient de champ magnétique exciteur.

2.2.3. Approximation de Boussinesq

L'approximation de Boussinesq s'écrit:

$$\text{Div } \mathbf{V} = 0 \quad (8)$$

2.2.4. Equation de l'énergie

La dérivation thermodynamique complète de l'équation de l'énergie est donnée par Finlayson [4]. Si l'on se place loin de la température de Curie, ce qui correspond

à notre situation expérimentale, on peut négliger le terme traduisant l'effet magnétocalorifique, l'équation de l'énergie stationnaire se ramène à celle d'une fluide classique:

$$-\nabla T_c V + a \Delta T' = 0 \quad (9)$$

a est la diffusivité thermique. En utilisant (3), l'équation (9) s'écrit:

$$\frac{C}{r} u + a \Delta T' = 0 \quad \text{où} \quad \dot{C} = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (10)$$

2.3. Analyse dimensionnelle

Dans le repère de coordonnées cylindriques $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$, l'approximation de Boussinesq (8) ainsi que les équations (7) et (10) s'écrivent:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + \frac{\mu_0 K T'}{1 + \chi} |\nabla H_a| = 0 \quad (12)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (13)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \rho(T^*) \beta g T' = 0 \quad (14)$$

$$a \left[\frac{\partial^2 T'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T'}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right] + \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{u}{r} = 0. \quad (15)$$

La cavité annulaire nous conduit à choisir les variables réduites suivantes:

$$r^* = \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}, \quad z^* = \frac{z}{\varepsilon}$$

$$u^* = \frac{u}{V_0}, \quad v^* = \frac{v}{V_0}, \quad w^* = \frac{w}{V_0}$$

$$p^* = \frac{P}{P_0}, \quad T^* = \frac{T'}{\Delta T}$$

Nous notons par:

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\Delta R} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{\Delta R}{R_1}$$

Des considérations d'analyse dimensionnelle [10] nous permettent de prendre les variables caractéristiques suivantes:

$$V_0 = \frac{a}{\Delta R}, \quad V_0' = \frac{\varepsilon}{\Delta R} V_0,$$

$$\Delta T = \frac{\mu(1 + \chi)a}{\mu_0 K |\nabla H_a| \varepsilon^2 \Delta R}, \quad P_0 = \frac{\rho_0 \nu a}{\varepsilon^2}.$$

En introduisant les variables réduites dans le système (11)–(15), nous obtenons:

$$\frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{\delta}{1 + \delta r^*} u^* + \frac{\delta}{1 + \delta r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (16)$$

$$-\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \varepsilon^{*2} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{1 + \delta r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \left[\frac{\delta}{1 + \delta r^*} \right]^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} - \left[\frac{\delta}{1 + \delta r^*} \right]^2 u^* - 2 \left[\frac{\delta}{1 + \delta r^*} \right]^2 \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} + T^* = 0 \quad (17)$$

$$-\frac{\delta}{1 + \delta r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} + \varepsilon^{*2} \left[\frac{\partial^2 v^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{1 + \delta r^*} \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \left[\frac{\delta}{1 + \delta r^*} \right]^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial \theta^2} - \left[\frac{\delta}{1 + \delta r^*} \right]^2 v^* + 2 \left[\frac{\delta}{1 + \delta r^*} \right]^2 \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} = 0 \quad (18)$$

$$\varepsilon^{*5} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \varepsilon^{*5} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{1 + \delta r^*} \frac{\partial w^*}{\partial r^*} + \left[\frac{\delta}{1 + \delta r^*} \right]^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial \theta^2} \right] + \varepsilon^{*3} \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} + \frac{Ra^*}{Ram^*} T^* = 0 \quad (19)$$

$$\varepsilon^{*2} \left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{1 + \delta r^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \left[\frac{\delta}{1 + \delta r^*} \right]^2 \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\ln(1 + \delta)} \frac{\delta}{1 + \delta r^*} Ram^* u^* \right] + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} = 0 \quad (20)$$

où $Ram^* = (\mu_0 K |\nabla H_a| (T_1 - T_2) \varepsilon^2 \Delta R / \mu(1 + \chi)a)$ est le nombre de Rayleigh magnétique de la cellule. Ra^* est le nombre de Rayleigh gravitationnel de la cellule défini par: $(\beta g (T_1 - T_2) \varepsilon^4 / \nu \Delta R a)$, ce nombre a été construit de la même façon que dans le problème de convection d'un fluide enfermé dans une cavité parallélépipédique d'ex-

tension infinie et ayant un rapport transversal $(\varepsilon/\Delta R) \ll 1$ et soumis à un gradient de température horizontal [11].

Pour des raisons de commodité, nous omettrons dans la suite les astérisques sur les variables réduites dans le système (16)–(20).

2.4. Approximation de Hele–Shaw

Une première approximation du système (16)–(20), indépendante du rapport d’aspect ε^{*2} , est obtenue en posant $\varepsilon^{*2} = 0$. Nous notons par u_0, v_0, w_0, P_0 et T_0 les solutions de cette première approximation. De l’équation (19), et d’un point de vue asymptotique, nous montrons que $Ra^* \ll Ram^*$. Dans la suite, nous ne tenons pas compte du terme Ra^*/Ram^* dans l’équation (19). Cette dernière permet donc de montrer que la pression P_0 est indépendante de z . De même (20) et la condition d’adiabaticité, sur les parois horizontales en $z = 0$ et $z = 1$, permettent de montrer que T_0 est aussi indépendante de z . Soient:

$$P_0(r, \theta), \quad T_0(r, \theta).$$

L’intégration des équations qui découlent de (17) et (18) permet d’obtenir:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2}z(z-1) \left[\frac{\partial P_0}{\partial r} - T_0 \right] \\ v_0 &= \frac{1}{2}z(z-1) \frac{\delta}{1+\delta r} \frac{\partial P_0}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (21)$$

Nous introduisons (21) dans l’équation de continuité (16). Après intégration de cette dernière en z , et en utilisant la condition d’adhérence de w_0 en $z = 0$ et $z = 1$, nous montrons que $w_0 = 0$. Ceci se traduit par l’équation linéaire aux dérivées partielles:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_0}{\partial r^2} + \frac{\delta}{1+\delta r} \frac{\partial P_0}{\partial r} + \left[\frac{\delta}{1+\delta r} \right]^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \theta^2} \\ - \left[\frac{\partial T_0}{\partial r} + \frac{\delta}{1+\delta r} T_0 \right] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

L’équation de l’énergie est cherchée à l’ordre ε^{*2} en adoptant la même démarche que [12, 13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_0}{\partial r^2} + \frac{\delta}{1+\delta r} \frac{\partial T_0}{\partial r} + \left[\frac{\delta}{1+\delta r} \right]^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial \theta^2} \\ - \frac{1}{\ln(1+\delta)} \frac{\delta}{1+\delta r} \frac{Ram^*}{12} \left[\frac{\partial P_0}{\partial r} - T_0 \right] = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Le système (22)–(23) est associé aux conditions aux limites:

$$u_0 = T_0 = 0,$$

$$\text{qui se traduit par: } \frac{\partial P_0}{\partial r} = T_0 = 0 \quad \text{en } r = 0, 1. \quad (24)$$

3. Etude de stabilité

3.1. Analyse en modes normaux—methode de Galerkin

Nous allons faire un premier changement de variable dans le système (22)–(23):

$$\tilde{r} = \frac{1+\delta r}{\delta} \quad (25)$$

nous obtenons:

$$\begin{aligned} \Delta_2 \tilde{P}_0 &= \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} [\tilde{r} \tilde{T}_0] \\ \Delta_2 \tilde{T} &= \frac{Ram^*}{12} \left[\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial \tilde{r}} - \tilde{T}_0 \right] \end{aligned} \quad (26)$$

où

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \tilde{P}_0(\tilde{r}, \theta) \quad \text{et} \quad \tilde{T}_0(\tilde{r}, \theta).$$

Nous écrivons la solution du système (26) en modes normaux:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 &= f(\tilde{r}) e^{im\theta} \\ \tilde{T}_0 &= g(\tilde{r}) e^{im\theta} \end{aligned} \quad (27)$$

or

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(\theta_0) &= \tilde{P}_0(\theta_0 + 2\pi) \\ \tilde{T}_0(\theta_0) &= \tilde{T}_0(\theta_0 + 2\pi) \end{aligned}$$

Le nombre d’onde azimutal m est donc un nombre entier. Le système (26) s’écrit:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{f}}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{r}} - \frac{m^2}{\tilde{r}^2} \tilde{f} &= \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} [\tilde{r} \tilde{g}] \\ \frac{d^2 \tilde{g}}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{g}}{d\tilde{r}} + \left[\frac{Ram^*}{12 \ln(1+\delta)} \frac{1}{\tilde{r}} - \frac{m^2}{\tilde{r}^2} \right] \tilde{g} &= \frac{Ram^*}{12 \ln(1+\delta)} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{r}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Nous procédons à un nouveau changement de variable dans le système (28)–(29): $\tilde{r} = u^2$. Nous obtenons:

$$D_m[f] = 4u^2 \left[g + \frac{u}{2} \frac{dg}{du} \right] \quad (30)$$

$$[D_m + k^2][g] = k^2 \frac{1}{2u} \frac{df}{du} \quad (31)$$

où

$$D_m = \frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d}{du} - \frac{4m^2}{u^2} \quad \text{et} \quad k = \sqrt{\frac{Ram^*}{3 \ln(1+\delta)}}.$$

La solution générale de l’équation homogène de (31) est:

$$G(u) = AJ_{2m}[ku] + BY_{2m}[ku]$$

J_{2m} et Y_{2m} sont respectivement des fonctions de Bessel de première et deuxième espèce d’ordre $2m$. $G(u)$ vérifie les conditions aux limites:

$$G = 0 \quad \text{en } u_1 = \sqrt{\frac{1}{\delta}} \quad \text{et } u_2 = \sqrt{\frac{1+\delta}{\delta}}$$

soit

$$AJ_{2m}[ku_1] + BY_{2m}[ku_1] = 0$$

$$AJ_{2m}[ku_2] + BY_{2m}[ku_2] = 0$$

or $A \neq 0$ et $B \neq 0$, ceci impose:

$$\begin{bmatrix} J_{2m}[ku_1] & Y_{2m}[ku_1] \\ J_{2m}[ku_2] & Y_{2m}[ku_2] \end{bmatrix} = 0$$

donc

$$J_{2m}[ku_1]Y_{2m}[ku_2] - J_{2m}[ku_2]Y_{2m}[ku_1] = 0. \quad (32)$$

Cette équation a une infinité de solutions k_i (valeurs propres), d'où les fonctions propres:

$$G_i(u) = c_i [Y_{2m}[k_i u] J_{2m}[k_i u_1] - J_{2m}[k_i u] Y_{2m}[k_i u_1]]. \quad (33)$$

Les fonctions $G_i(u)$ sont orthogonales. Les constantes c_i sont calculées de telle sorte que les fonctions propres soient orthonormales:

$$\int_{u_1}^{u_2} u G_i(u) G_j(u) du = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (34)$$

D'après un théorème sur les fonctions de Bessel: toute fonction $G(u)$, définie continue sur $[u_1, u_2]$ avec $G(u_1) = G(u_2) = 0$, peut être développée en série de Fourier–Bessel absolument et uniformément convergente:

$$G(u) = \sum_{i=1}^N c_i G_i(u).$$

Or $g(u)$ et $(df/du)(u)$ du système (30)–(31) vérifient ces conditions, nous posons:

$$\frac{df}{du}(u) = \sum_{i=1}^N a_i G_i(u) \quad g(u) = \sum_{i=1}^N b_i G_i(u) \quad (35)$$

(34) et (35) permettent d'obtenir:

$$a_n = \int_{u_1}^{u_2} u \frac{df}{du}(u) G_n(u) du, \quad b_n = \int_{u_1}^{u_2} u g(u) G_n(u) du \quad (36)$$

Nous reprenons maintenant l'équation (31):

$$[D_m + k^2][g] = k^2 \frac{1}{2u} \frac{df}{du}.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $u G_j(u)$, et en intégrant entre u_1 et u_2 , nous obtenons:

$$\int_{u_1}^{u_2} u D_m[g] G_j(u) du + k^2 b_j = k^2 \sum_{i=1}^N A_{ji} a_i \quad (37)$$

où

$$A_{ji} = \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} G_i(u) G_j(u) du. \quad (38)$$

Le calcul du premier terme du premier membre de (37) se fait en utilisant (35), et en sachant que les fonctions propres $G_i(u)$ vérifient:

$$D_m[G_i] = -k_i^2 G_i. \quad (39)$$

Nous obtenons donc:

$$\int_{u_1}^{u_2} u D_m[g] G_j(u) du = -k_j^2 b_j \quad (40)$$

(37) s'écrit finalement:

$$(k^2 - k_j^2) b_j = k^2 \sum_{i=1}^N A_{ji} a_i. \quad (41)$$

Nous reprenons l'équation (30):

$$D_m[f] = 4u^2 \left[g + \frac{u}{2} \frac{dg}{du} \right].$$

Nous dérivons cette équation puis nous écrivons sa dérivée sous la forme:

$$u D_m \left[\frac{df}{du} \right] + 2 \frac{d^2 f}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{df}{du} = 8g + 10u \frac{dg}{du} + 2u^2 \frac{d^2 g}{du^2}. \quad (42)$$

Nous multiplions chaque membre de l'équation (42) par $G_j(u)$, puis nous intégrons entre u_1 et u_2 :

$$\begin{aligned} \int_{u_1}^{u_2} u D_m \left[\frac{df}{du} \right] G_j(u) du + \int_{u_1}^{u_2} \left[2 \frac{d^2 f}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{df}{du} \right] G_j(u) du \\ = \int_{u_1}^{u_2} \left[8g + 10u \frac{dg}{du} + 2u^2 \frac{d^2 g}{du^2} \right] G_j(u) du \end{aligned} \quad (43)$$

(34), (35) et (39) permettent d'écrire (43) sous la forme:

$$-k_j^2 a_j + \sum_{i=1}^N B_{ji} a_i = \sum_{i=1}^N C_{ji} b_i \quad (44)$$

où

$$B_{ji} = \int_{u_1}^{u_2} \left[2 \frac{dG_i}{du} + \frac{G_i}{u} \right] G_j(u) du$$

$$C_{ji} = \int_{u_1}^{u_2} \left[8G_i + 10u \frac{dG_i}{du} + 2u^2 \frac{d^2 G_i}{du^2} \right] G_j(u) du.$$

Le système (41)–(44) s'écrit donc:

$$\sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} k^2 A_{ji} & -(k^2 - k_i^2) \delta_{ij} \\ B_{ji} - k_i^2 \delta_{ij} & -C_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que nous écrivons finalement sous la forme:

$$\begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1N} & Y_{11} & \dots & Y_{1N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{N1} & \dots & X_{NN} & Y_{N1} & \dots & Y_{NN} \\ Z_{11} & \dots & Z_{1N} & W_{11} & \dots & W_{1N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{N1} & \dots & Z_{NN} & W_{N1} & \dots & W_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \\ b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

où

$$X_{ij} = k^2 A_{ji}$$

$$Y_{ij} = -(k^2 - k_i^2)\delta_{ij}$$

$$Z_{ij} = B_{ji} - k_i^2\delta_{ij}$$

$$W_{ij} = -C_{ji}$$

La matrice associée au système (45) est construite de quatre blocks de matrices. Une solution non triviale du système (45) existe, si le déterminant de la matrice associé est nul. Ceci se traduit par une relation entre le nombre de Rayleigh magnétique Ram^* et le nombre d'onde azimutal m . Les résultats de la résolution numérique convergent à partir de $N = 5$. Nous présentons les valeurs critiques, correspondant au seuil de convection, pour différentes valeurs de δ proches de notre situation expérimentale ($\delta = 0.19$), (Tableau 1).

Le système (22)–(23) a été donc résolu pour des valeurs de δ quelconques et nous avons constaté que pour $\delta \ll 1$, le nombre de Rayleigh magnétique critique tend vers $48\pi^2$, valeur qui correspond au cas d'une cellule horizontale d'extension infinie [12, 13, 14].

Dans le paragraphe qui suit, nous résolvons analytiquement le système (22)–(23) dans le cas de l'approximation $\delta \ll 1$.

3.2. Analyse en modes normaux—approximation $\delta \ll 1$

Nous allons donc, dans ce paragraphe, traiter le cas où $\delta = \Delta R/R$ est très petit devant l'unité. Ce qui est le cas de l'étude expérimentale. Le système (22)–(23) s'écrit donc:

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial r^2} + \delta \frac{\partial P_0}{\partial r} + \delta^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial T_0}{\partial r} - \delta T_0 = 0 \quad (46)$$

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial r^2} + \delta \frac{\partial T_0}{\partial r} + \delta^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial \theta^2} - \frac{Ram^*}{12} \left[\frac{\partial P_0}{\partial r} - T_0 \right] = 0. \quad (47)$$

Nous écrivons la solution du système (46)–(47) en modes normaux:

$$P_0 = f(r)e^{im\theta}$$

$$T_0 = g(r)e^{im\theta} \quad (48)$$

Table 1
Nombres d'onde critiques et nombres de Rayleigh magnétique critiques pour différentes valeurs de δ

$\delta = (\Delta R/R)$	m_c (nombre d'onde azimutal critique)	Ram_c^* (nombre de Rayleigh magnétique critique)
0.14	24	473.83
0.19	18	473.86
0.23	15	473.97
0.32	11	475.51
0.5	8	477.87
0.59	8	483.01

où le nombre d'onde m est un entier. Le système (46)–(47) s'écrit:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \delta \frac{df}{dr} - \delta^2 m^2 f - \frac{dg}{dr} - \delta g = 0 \quad (49)$$

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \delta \frac{dg}{dr} + \left[\frac{Ram^*}{12} - \delta^2 m^2 \right] g - \frac{Ram^*}{12} \frac{df}{dr} = 0. \quad (50)$$

Ce système est associé aux conditions aux limites:

$$\frac{df}{dr} = g = 0 \quad \text{en } r = 0, 1. \quad (51)$$

Nous cherchons des solutions de f et g sous la forme:

$$\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ g_0 \end{bmatrix} e^{sr}$$

(49)–(50) s'écrit:

$$[s^2 + \delta s - \delta^2 m^2] f_0 - [s + \delta] g_0 = 0$$

$$- \frac{Ram^*}{12} s f_0 + \left[s^2 + \delta s - \delta^2 m^2 + \frac{Ram^*}{12} \right] g_0 = 0.$$

Nous avons des solutions f_0 et g_0 non nulles, si le déterminant de ce système est nul. D'où la relation de dispersion:

$$[s^2 + \delta s - \delta^2 m^2]^2 - \delta^2 m^2 \frac{Ram^*}{12} = 0.$$

Le cas intéressant est celui qui correspond à deux racines réelles et deux racines imaginaires:

$$s_{1,2} = \frac{\delta}{2} \left[-1 \pm \sqrt{1 + 4m^2 \left[1 + \left(\frac{Ram^*}{12\delta^2 m^2} \right)^{1/2} \right]} \right]$$

$$s_{3,4} = \frac{\delta}{2} \left[-1 \pm i \sqrt{-1 + 4m^2 \left[-1 + \left(\frac{Ram^*}{12\delta^2 m^2} \right)^{1/2} \right]} \right]$$

La solution du système (49)–(50) s'écrit donc:

$$f(z) = e^{-\frac{\delta}{2} z} [A \cos(\lambda r) + B \sin(\lambda r)] + C e^{s_1 r} + D e^{s_2 r}$$

$$g(z) = e^{-\frac{\delta}{2} z} [A' \cos(\lambda r) + B' \sin(\lambda r)] + C' e^{s_1 r} + D' e^{s_2 r} \quad (52)$$

où

$$\lambda = \frac{\delta}{2} \sqrt{-1 + 4m^2 \left[-1 + \left(\frac{Ram^*}{12\delta^2 m^2} \right)^{1/2} \right]} \quad (53)$$

A partir des conditions aux limites (51), nous obtenons un système linéaire de 4 équations sans second membre et où les inconnues sont les constantes A, B, C et D . Ce système admet une solution non triviale, si le déterminant de sa matrice représentative est nul:

$$s_1 s_2 [s_1 s_2 (s_1 + \delta)(s_2 + \delta) + \alpha [s_1 (s_1 + \delta) + s_2 (s_2 + \delta)] + \alpha^2] (e^{s_2} - e^{s_1}) e^{-\frac{\delta}{2}} \sin(\lambda) = 0 \quad (54)$$

où

$$\alpha = \lambda^2 + \frac{\delta^4}{4}$$

(54) est vérifiée si $\sin(\lambda) = 0$, soit $\lambda = n\pi$. D'où d'après (53):

$$Ram^* = 12\delta^2 m^2 \left[1 + \frac{n^2 \pi^2 + \frac{\delta^2}{4}}{\delta^2 m^2} \right].$$

La première instabilité apparaît pour $n = 1$. Le nombre de Rayleigh et le nombre d'onde critiques sont:

$$m = 17 \quad Ram_c^* = 474.528$$

Nous constatons que la valeur du nombre de Rayleigh critique calculée dans ce paragraphe est très proche de celle calculée dans le paragraphe précédent pour $\delta \ll 1$. Quand au nombre d'onde azimutal pour $\delta = 0.19$ (valeur du montage expérimental), il vaut 17 au lieu de 18. Cette différence entre les deux nombres d'onde azimutaux provient sans doute de l'approximation analytique ($\delta \ll 1$).

4. Etude expérimentale

4.1. Cuve de Hele–Shaw annulaire

La cellule de Hele–Shaw est constituée de deux plaques en plexiglas, transparentes, annulaires et parallèles (Fig. 2). Deux rainures de largeur $\Delta R = 20$ mm et d'épaisseur $\varepsilon/2 = 2$ mm sont usinées sur les deux plaques en plexiglas (1 and 1') dans le but d'obtenir, lors de l'assemblage de ces deux dernières, une cavité annulaire de section rectangulaire d'épaisseur 4 mm où le ferrofluide (2) sera placé.

Les deux conduites annulaires de sections rectangu-

lares (3 and 3') permettent la circulation d'eau chaude et froide afin de maintenir respectivement les deux couronnes en cuivre (4 and 4') aux températures constantes T_1 et T_2 . Les deux couronnes en cuivre sont insérées dans quatre gorges usinées sur les deux plaques en plexiglas. L'étanchéité est assurée par 4 joints toriques (5), insérés dans chacune des gorges. La hauteur de chaque plaque de cuivre est de l'ordre de 14 mm.

4.2. Caractéristiques de l'électro-aimant

Nous disposons d'un électro-aimant type EAF-16-NC (Fig. 3) possédant un entrefer $e = 110$ mm. A l'intérieur de l'entrefer, entre les deux poles N et S , règne un champ magnétique constant parallèle à Oz et dont le module peut varier en fonction du courant I qui circule dans les bobines de l'électro-aimant. Autour de l'entrefer règne un champ de fuite, ce dernier a une particularité qui nous est intéressante: d'une part nous pouvons l'approximer par la formule (1), d'autre part dans le plan horizontal qui passe au milieu de l'entrefer, le champ de fuite est parallèle à Oz et possède un gradient radial constant qui varie aussi en fonction du courant I circulant dans les bobines. La Fig. 4 présente l'évolution du champ magnétique en fonction de la coordonnée radiale pour une intensité de courant $I = 10$ A. Nous avons aussi effectué un étalonnage du gradient de champ, dans le plan médian, en fonction du courant I (Fig. 5). Les mesures ont été effectuées par l'intermédiaire d'un Gauss-mètre, type MG-5D, opérant sous le principe d'effet Hall.

La couronne de ferrofluide est placée au milieu de l'entrefer, dans la zone où il y a un gradient de champ

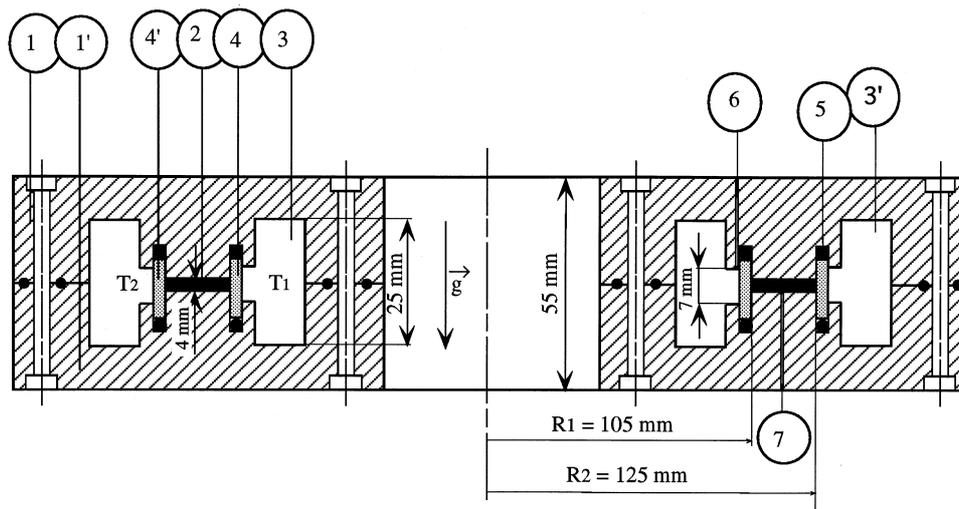


Fig. 2. Section de la cuve de Hele–Shaw: 1 and 1', Parois en plexiglas, 2, Ferrofluide, 3 and 3', conduites de circulation d'eau chaude et froide, 4 and 4', Couronnes en cuivre, 5, joint torique, 6, Emplacement de 8 thermocouples type K ($\varnothing 1$ mm), 7, 5 thermocouples type K ($\varnothing 0.1$ mm).

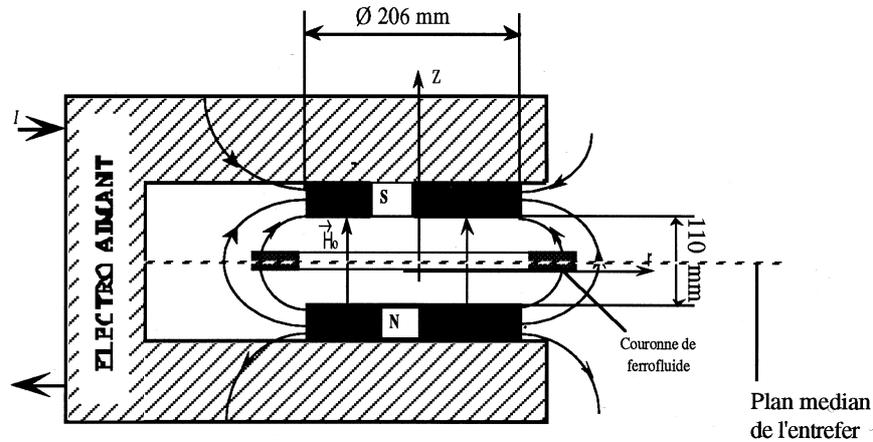


Fig. 3. Electro-aimant

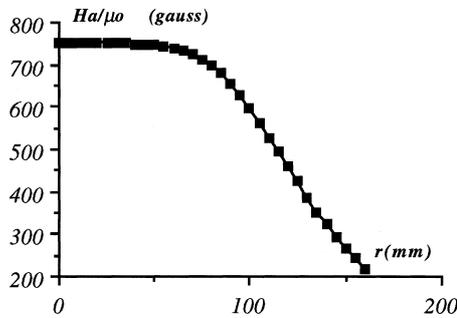


Fig. 4. Exemple d'évolution du champ magnétique H_a en fonction de la coordonnée radiale r dans le plan médian de l'entrefer ($I = 10$ A).

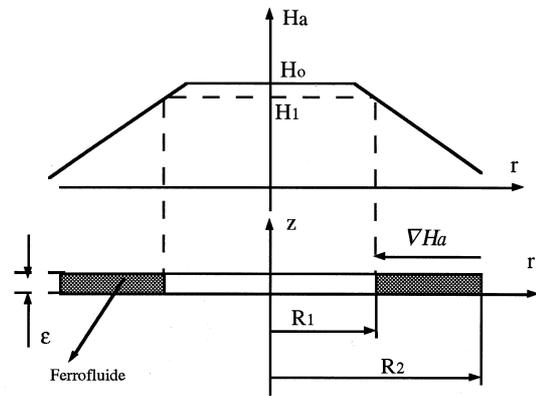


Fig. 6. Schéma de principe: couronne de ferrofluide soumise à gradient de champ magnétique radial.

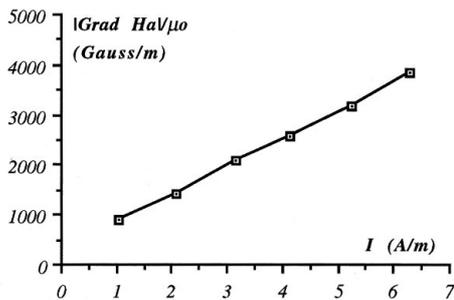


Fig. 5. Etalonnage de $|\nabla H_a/\mu_0|$ en fonction du courant I .

radial, entre $R_1 = 105$ mm et $R_2 = 125$ mm. L'épaisseur de la couronne (4 mm) est assez mince pour que nous assimilions cette situation à celle de la Fig. 6.

4.3. Ferrofluide 'test'

Le liquide magnétique que nous avons utilisé dans notre campagne expérimentale est un ferrofluide EMG

905 de la Ferrofluidics Corporation, à base d'hydrocarbure. Il possède les propriétés physiques et mécaniques données par le fabricant: susceptibilité magnétique $\chi = 2$, aimantation de saturation $M_s = 3.18 \times 10^4$ A/m, densité $\rho = 1.26 \times 10^3$ kg m⁻³, viscosité dynamique $\mu = 8.4 \times 10^{-3}$ kg m⁻¹ s⁻¹, diffusivité thermique $a = 8.6 \times 10^{-8}$ m² s⁻¹. Le même ferrofluide a été utilisé par Stiles et Kagan [6] qui ont calculé son coefficient pyromagnétique par la relation $K = \alpha M_s$ [3, 15] où $\alpha = 8.6 \times 10^{-4}$ K⁻¹ [16]. K est de l'ordre de 27.3 A m⁻¹ K⁻¹.

4.4. Seuil de convection expérimental

Afin de déterminer le nombre de Rayleigh magnétique critique, correspondant au seuil de convection expérimental, nous avons utilisé simultanément deux techniques:

la première consiste à mesurer le champ de température au centre de la cavité annulaire qu'occupe le ferrofluide, dans la direction azimutale. Pour cela, 5 thermocouples ($\varnothing = 0.1$ mm) de précision 0.05°C ont été répartis régulièrement, ils sont indiqués par 7 sur la Fig. 2 et schématisés sur la Fig. 6.

La deuxième technique consiste à visualiser le champ de température à l'aide de cristaux liquides. Ces derniers indiquent par leur couleur, de façon directe et sans appareils accessoires, une mesure de température avec une constante de temps minimale de l'ordre de 0.1 seconde. Le phénomène étant réversible, on peut suivre des évolutions de température au cours du temps [17, 18]. En ce qui concerne notre expérience, nous avons collé sur la face interne supérieure de la cavité qu'occupe le ferrofluide, une pastille annulaire de cristaux liquides. Le champ de température à l'interface ferrofluide–pastille est donc observé à travers la paroi de plexiglas. L'étalonnage des pastilles utilisées est donné par le fabricant, Tableau 2.

Le seuil de convection est déterminé de la façon suivante: Nous fixons d'abord un écart de température constant, entre la plaque chaude et la plaque froide, de telle sorte que le ferrofluide soit en régime conductif. Pour travailler dans la zone d'utilisation des cristaux liquides donnée par la Table 2, la température de la plaque froide est maintenue à 26° en général. Le régime conductif est mis en évidence par les isothermes, en cercles concentriques, qu'on observe sur la pastille de cristaux liquides (schéma (1) de la Fig. 7), ceci est vérifié simultanément par les mesures de température dans la direction azimutale par l'intermédiaire des cinq thermocouples placés dans le ferrofluide. Une fois le régime conductif établi, nous appliquons un gradient de champ magnétique très faible que nous faisons augmenter, à pas très faible, par l'intermédiaire du courant qui circule dans les bobines de l'électro-aimant. Dès que les premières déformations des isothermes se manifestent (schéma (2) de la Fig. 7) et que

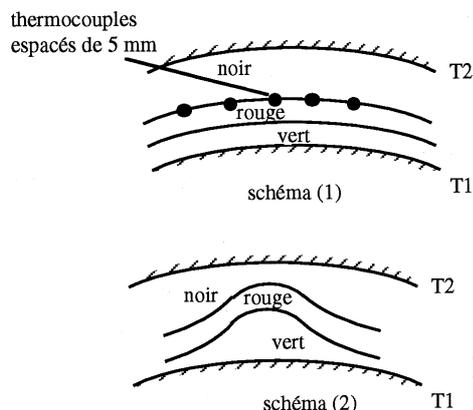


Fig. 7. Schéma 1: régime conductif correspondant à des cercles concentriques (vert, rouge, noir) les thermocouples indiquent la même température. Schéma 2: régime convectif (déformation des isothermes) les thermocouples indiquent des températures différentes.

les mesures de température par thermocouples dans la direction azimutale différent d'un thermocouple à l'autre, nous pouvons considérer qu'il y a convection, et nous prélevons l'écart de température et le gradient de champ magnétique appliqués. Plusieurs essais ont été effectués et dont les résultats sont présentés dans le Tableau 3.

La détermination expérimentale de l'écart de température minimal qui peut être décelé pour la détermination du seuil de convection a beaucoup dépendu des moyens dont nous disposons. Une bonne utilisation des cristaux liquides doit être faite avec un maximum de couleurs, nous avons donc évité de travailler avec de faibles écarts de température, ceci explique le fait qu'on est descendu seulement jusqu'à $\Delta T = 4.7^\circ\text{C}$.

Ces écarts de température correspondent à des nombres de Rayleigh gravitationnels Ra^* de l'ordre de 200, de plus le nombre de Prandtl du liquide magnétique utilisé est très supérieur à l'unité, on est donc très loin des zones critiques qui peuvent conduire à une instabilité gravitationnelle [11]. Ceci permet de justifier qu'on a affaire à une instabilité purement magnétique.

Nous constatons aussi, D'après les mesures expérimentales, qu'il y a une certaine constance du nombre de Rayleigh magnétique critique. Malheureusement ce dernier est largement supérieur à celui calculé théoriquement dans Section 3, ceci peut être imputé aux points suivants:

- Il nous était difficile d'estimer avec précision les constantes physiques relatives aux propriétés thermomagnétiques du ferrofluide à base d'hydrocarbure que nous avons utilisé, en particulier son coefficient pyromagnétique K .
- Les parois horizontales en plexiglas supposées parfaitement isolantes dans le calcul théorique sont loin de l'être dans l'expérience. En effet, les conductivités ther-

Table 2
Etalonnage des cristaux liquides

Degré	Couleur
26.5	Noir
27	Rouge + noir
27.5	Rouge
28	Vert-rouge
29	Vert
30	Vert
32	Vert
33.5	Bleu + vert
35	Bleu
38.5	Noir + bleu
45	Noir

Table 3
Seuil de convection: résultats expérimentaux

ΔT	$ \nabla H_a $ (A m ⁻²)	$ \nabla H_a \Delta T 10^{-4}$ (A m ⁻²) K	Ram_c^* (nombre de Rayleigh magnétique critique)
9.4	6.57×10^4	61.7	4936
7.5	7.95	59.6	4768
6.2	1.03	63.8	5014
5	1.6	64	5146
4.7	1.45	68.1	5448

miques du plexiglas et du ferrofluide, si on suppose que celle de ce dernier est la même que celle du solvant (hydrocarbure), sont du même ordre ($\lambda_{\text{plexiglas}} = 0.18$ W K⁻¹ m⁻¹), $\lambda_{\text{ferrofluide}} = 0.22$ W K⁻¹ m⁻¹).

Or pour approcher les conditions idéales de parois parfaitement isolantes, il est nécessaire que la conductivité thermique du fluide test soit très supérieure à celle du matériel des parois horizontales.

Une étude qui tiendrait compte des fuites thermiques en changeant les conditions aux limites est envisageable et peut faire l'objet d'une perspective ultérieure.

5. Conclusions

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés au déclenchement du mouvement de convection de Rayleigh–Bénard dans un liquide magnétique soumis à un gradient de champ magnétique en configuration de Hele–Shaw annulaire et horizontale.

La formulation linéaire du problème et l'approximation de Hele–Shaw mènent à un système d'équations aux dérivées partielles, exprimé en coordonnées cylindriques, liant la pression et la température. La résolution de ce système a été effectuée dans un premier temps par la méthode de Galerkin pour des valeurs quelconques du paramètre de courbure $\delta = \Delta R/R_1$. Dans un deuxième temps cette résolution a été effectuée analytiquement pour $\delta \ll 1$, qui correspond à notre situation expérimentale. Pour ce dernier cas, les deux méthodes de résolution conduisent à la solution relative à la configuration d'une cellule de Hele–Shaw d'extension infinie et horizontale. Dans le cas général, le nombre de Rayleigh critique varie peu avec δ alors que le nombre d'onde (et par conséquent le nombre de cellules) dépend très fortement du paramètre de courbure.

Notons que lors de l'approximation de Hele–Shaw, qui consiste à faire tendre ε^* vers zéro, nous avons affaibli le problème de départ: en effet nous n'avons plus besoin que de quatre conditions aux limites au lieu de six, et le seuil de l'instabilité convective ne dépend plus de la nature

des conditions aux limites sur les faces conductrices (conditions aux limites sur le champ des vitesses).

Le montage expérimental conçu pour le cas $\delta \ll 1$ a permis de déterminer le nombre de Rayleigh critique. Malheureusement, il y a un grand écart entre le seuil de convection expérimental et celui théorique pour des raisons que nous avons évoquées à la fin de l'étude expérimentale. Malgré cet écart, cette étude constitue une illustration pédagogique de la convection de Rayleigh–Bénard contrôlée, et montre la possibilité de simuler, au sol, des situations de transfert de chaleur par convection naturelle en micro ou en macrogravité. Une autre application intéressante serait par exemple l'utilisation de ce principe dans l'élaboration de vannes thermiques. En effet, sans champ magnétique le transfert de chaleur se fait uniquement par conduction, et après application d'un certain gradient de champ permettant l'apparition des cellules convectives, ce transfert de chaleur est accru. Il est donc possible de transférer une quantité de chaleur plus ou moins grande d'une surface à une autre. Le réglage du champ magnétique joue le même rôle que celui d'une vanne thermique.

References

- [1] R.E. Rosenweig, *Ferrohydrodynamics*, Cambridge University Press, 1985.
- [2] B.M. Berkovsky (Ed.), *Thermomechanics of Magnetic Fluids. Theory and Applications*, Hemisphere, New York, 1978.
- [3] V.G. Bashtovoy, B.M. Berkovsky, A.N. Vislovich, in: B.M. Berkovsky (Ed.), *Introduction to the Thermomechanics of Magnetic Fluids*, Hemisphere, New York 1988.
- [4] B.A. Finlayson, Convective instability of ferromagnetic fluids, *J. Fluid Mech* 40 (1970) 753.
- [5] L. Shawab, Thermal convection in ferrofluids under a free surface, *J. Magn. Magn. Mat* 85 (1990) 199–202.
- [6] P.J. Stiles, M. Kagan, Thermoconvective instability of a horizontal layer of ferrofluid in a strong vertical magnetic field, *J. Magn. Magn. Mat* 85 (1990) 196–198.
- [7] N. Rudraiah, G.N. Sekhar, Convection in magnetic fluids

- with internal heat generation, ASME. Journal of Heat Transfer 113 (1991) 122–127.
- [8] A.V. Luikov, B.M. Berkovsky, V.G. Bashtovoi, Convection in ferromagnetic fluid due to magnetocaloric effect, Int. Seminar, Heat and Mass Transfer in Radiologically Complex Fluids, Yugoslavia, Herceg-Novi, 1970.
- [9] J.P. Brancher, Sur l'hydrodynamique des ferrofluides, Thèse I.N.P.L., Nancy, 1981.
- [10] S. Aniss, Instabilités convectives en cellules de Hele–Shaw. Cas d'un liquide magnétique, Thèse I.N.P.L., Nancy, 1993.
- [11] J. Hart, A note on the stability of low Prandtl-number Hadley circulations, J. Fluid Mech. 132 (1983) 271–281.
- [12] M. Souhar, J.P. Brancher, S. Aniss, Instabilités de Rayleigh–Bénard en cellules de Hele–Shaw. Int. J. Heat and Mass Transfer, 35 (1992) 749.
- [13] S. Aniss, M. Souhar, J.P. Brancher, Asymptotic study and weakly nonlinear analysis at the onset of Rayleigh–Bénard convection in Hele–Shaw cell, Physics Fluids 7(5) (1995).
- [14] H. Frick, R.M. Clever, Einfluss der seitenwände auf das einsetzen der konvektion in einer horizontalen flüssigkeitsschicht, Z. Angew. Math. Phys. 31 (1980) 502.
- [15] P.J. Stiles, M. J. Kagan, Colloid Interface Sci., in press.
- [16] L. Schwab, U. Hildebrandt, K. Stierstadt, J. Magn. Magn. Mat 39 (1983) 113.
- [17] T.E. Cooper, R.J. Field, J.F. Meyer, Liquid crystal thermography and its application to the study of convective heat transfer. Trans. A.S.M.E. J. Heat Transfer (U.S.A.) 97 (1975) 442.
- [18] F. Davis, F. Bernstein, A.P. Pontello, Liquid crystals and effective inspection tool for the aerospace industry, Material Evaluation (U.S.A.) 30 (1972) 36A.